ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΕΓΚΩΜΙΟΝ

του Ε. Αγγελόπουλου*

Αφιερώνεται στους
Παντελή Ρόκο
Γιώργο Κολλάρο
Denis Clodic
που μ'έμαθαν Γεωμετρία

Όταν κανείς αρχίζει και βγάζει ένα λόγο επιχειρηματολογώντας υπέρ ή κατά κάποιου, συνηθίζουμε να δίνουμε περισσότερη βάση (και καλώς ίσως) στο *γιατί* λέει αυτά που λέει, παρά στο *τί* λέει. Αισθάνομαι λοιπόν καταρχήν υποχρεωμένος να δηλώσω τα κίνητρά μου, δηλαδή για ποιό λόγο θα τοποθετηθώ υπερ της Γεωμετρίας.

Πρώτα - πρώτα γιατί μ' αρέσει η Γεωμετρία. Δεν νομίζω ότι αυτό χρειάζεται παραπέρα εξήγηση.

Δεύτερο γιατί αρνούμαι να υποστώ την μοίρα των δεινοσαύρων. Αυτό χρειάζεται κάποια εξήγηση. Διδάσκω Μαθηματικά και παρατηρώ ότι στους φοιτητές μου, τόσο στους πρωτοετείς, τους νεοεισερχόμενους από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση, όσο και στους μεταπτυχιακούς, που έχουν ολοκληρώσει ένα μαθηματικό ας πούμε κύκλο ή και ένα κύκλο σπουδών μηχανικού, υπάρχει μια έλλειψη κοινής γλώσσας, κοινού υποβάθρου. Σ΄αυτούς, τα γεωμετρικά σχήματα με τα οποία οι παλαιότεροι από μας έχουν - για να χρησιμοποιήσω έναν ευγενικό όρο - γαλουχηθεί, δεν τους λένε και πολλά πράγματα. Δεν αποτελούν γι αυτούς, αυτό το οποίο ο Kuhn αποκαλεί "*επιστημολογικό παράδειγμα*". Και σα δάσκαλος, θέλω να έχω ένα κοινό πλαίσιο επικοινωνίας με τους φοιτητές μου, θέλω να έχω το ίδιο πολιτισμικό υπόβαθρο, θέλω αυτά τα οποία τους λέω να τα καταλαβαίνουν με τις ίδιες προσλαμβάνουσες με μένα.

Επομένως, ο λόγος που θα βγάλω έχει μέσα του μια **ιδιοτέλεια**. Έχει μία **υποκειμενικότητα**. Από κει και πέρα, έχοντας δώσει τα κίνητρά μου, οτιδήποτε πω και η οποιαδήποτε επιχειρηματολογία μου, μπορεί μεν να πηγάζει από ιδιοτέλεια, αλλά η όποια αξία της έγκειται στο κατά πόσο αυτή την ιδιοτέλεια, αυτή την υποκειμενικότητα, την ξεπερνάει.

- Θα αρχίσω λοιπόν με κάτι που είχα πει κάποτε σε συμμαθητές μου, όταν είχα φύγει για πρώτη χρονιά μετά το Γυμνάσιο (το τότε εξατάξιο Γυμνάσιο, σε αντιστοιχία με το σημερινό Λύκειο), στη Γαλλία, όπου είχα ανακαλύψει την Αναλυτική Γεωμετρία σε αρκετό βάθος, όπως διδασκότανε τότε. Και γελώντας είχα πει, όταν μου λέγανε "*τί κανετε; Γεωμετρία, Τριγωνομετρία;*", είχα πει: **"Δεν υπάρχει Γεωμετρία, ούτε Τριγωνομετρία, όλα είναι συναρτήσεις"**.

Για να σταθώ λιγάκι σ' αυτό, υπό κάποια έννοια το ασπάζομαι ακόμα και σήμερα. Υπό κάποια έννοια, γιατί; Γιατί από την εποχή του Hilbert και μετά έχει αποδειχθεί ότι η Γεωμετρία, η κλασική τουλάχιστον Γεωμετρία, είναι ισοδύναμη με τη μελέτη των ιδιοτήτων ορισμένων υποσυνόλων του τρισδιάστατου χώρου R^3 ή του δισδιάστατου, αν μιλάμε για επιπεδομετρία, R^2. Τα πάντα μπορούν να εκφραστούν συνολοθεωρητικά. Τα πάντα μπορούν να εκφραστούν υπό μορφή συναρτήσεων.

Επομένως και η Γεωμετρία επίσης. Αρα, όντως δεν υπάρχει Γεωμετρία, υπάρχουν Συναρτήσεις. Ναι.

Επί πλέον, η Αναλυτική Γεωμετρία, την οποία τότε είχα πρωτοανακαλύψει, τί κάνει; **Μας απαλλάσσει από την τυραννία των σχημάτων:** Αν έχεις να εξετάσεις αν οι γωνίες είναι οξείες ή αμβλείες, δεν έχεις παρά να εφαρμόσεις τους τύπους και αυτό το οποίο σου βγαίνει, ένα + ή ένα - στο συνημίτονο καθορίζει το είδος της γωνίας. Από κει και πέρα, αλγεβρικά το συν και το πλην είναι της ίδιας μορφής, οπότε συν μία παράσταση, μείον μία παράσταση, είναι πάντα μία παράσταση. Και επομένως δεν έχεις πρόβλημα.

Απαλλαγήκαμε λοιπόν από την τυραννία των σχημάτων. Τί μένει όμως; Μένει το ερώτημα: **Μπορεί κανένας να κάνει την οικονομία των σχημάτων;**

- Εδώ υπάρχει μία ιστορική πορεία, η οποία πάλι από τη Γαλλία ξεκίνησε. Έχω πολλά υπέρ της Γαλλίας, αλλά έχω και ορισμένα εναντίον της. Το 1966 έγινε στην πόλη Caen της Γαλλίας ένα συνέδριο, όπου είπαν: *"Είναι καιρός επί τέλους τα μοντέρνα Μαθηματικά, τα οποία από την εποχή του Cantor μέχρι σήμερα* - μέχρι τότε δηλαδή, το 1966 - *έχουν πάρει μια βασική υπόσταση και διέπουν όλη μας τη δουλειά ως μαθηματικών, αυτών που παράγουμε Μαθηματικά, να μπουν από νωρίς στο σχολείο"*. Και αρχίσαμε από τότε μία πορεία η οποία έφερε τη Θεωρία Συνόλων στην πρώτη Δημοτικού, αν όχι στο Νηπιαγωγείο, και η οποία μεταξύ άλλων άδειασε την Ευκλείδεια Γεωμετρία από τα εκπαιδευτικά προγράμματα. Οι Γάλλοι βέβαια, μέσα σε αυτή την τριακονταετία, έκαναν διάφορες μεταρρυθμίσεις, με πολλές διορθωτικές αλλαγές σε ορισμένα πράγματα που ήταν ολέθρια. Αλλά πέρα από αυτό, το γενικό κλίμα της εποχής ήταν το εξής: Έβλεπες τον φοβερό καθηγητή Τάδε - ονόματα μη λέμε - ο οποίος έγραφε στον πίνακα τύπους, χωρίς κανένα σχήμα. Σε μια στιγμή είχε κάποια αμφιβολία. Γύρναγε την πλάτη του στο ακροατήριο, σχημάτιζε κρυφά στον πίνακα ένα μικρό σχηματάκι, να δει αν το σημείο θα πέσει μέσα ή έξω από την έλλειψη, ούτως ώστε να βάλει θετικό ή αρνητικό πρόσημο στην αντίστοιχη παράσταση. Το έσβηνε, για να μην το δουν. Και γύριζε και έβαζε στον τύπο το σωστό πρόσημο. Τα σχήματα είχαν εξοβελιστεί.

Τί σημαίνει αυτό; Σημαίνει ότι λείπει πλέον το παράδειγμα, το πλαίσιο αναφοράς της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τους Μαθηματικούς, για δεκαετίες θα έλεγα. Δεν είναι πλέον κοινός τόπος, για τους νέους Μαθηματικούς.

Και εδώ επισημαίνω το πρώτο βασικό λογικό άλμα : **Είναι άλλο πράμα να ξεπεράσεις την τυραννία των σχημάτων, και άλλο πράμα να εγκαταλείψεις τα σχήματα χωρίς να τάχεις διδαχτεί ποτέ.** Γιατί η εγκατάλειψη της τυραννίας των σχημάτων σημαίνει οτι διαθέτεις ισχυρότερες μεθόδους, με τις οποίες μπορείς να τα ταξινομήσεις, να τα μελετήσεις, να δεις τις ιδιότητες που σε ενδιαφέρουν. Να δεις καινούργιες ιδιότητες τις οποίες δεν υποπτευόσουν πριν, και άλλα πολλά. Δεν σημαίνει εγκατάλειψη των σχημάτων. Άλλο το ένα, άλλο το άλλο.

Θα προχωρήσω, λοιπόν, έχοντας αυτό ως πρώτο δεδομένο.

- Για να μιλήσω τώρα παραπέρα για το ρόλο της Γεωμετρίας, θα δώσω καταρχήν ένα πρόχειρο ορισμό. Έναν ορισμό, ο οποίος αξίζει ό,τι αξίζει: δεν διεκδικώ καμία επιστημολογική ανακάλυψη με αυτόν, αλλά το κάνω για λόγους ευχρηστίας στα πλαίσια αυτής της ομιλίας.

Καλώ Γεωμετρία, *τον κλάδο των Μαθηματικών ο οποίος μελετά το χώρο, τα σχήματα, τις σχέσεις μεταξύ των σχημάτων, τις μεταβολές των σχημάτων, ενδεχομένως τις μεταβολές στον χρόνο, δηλαδή τις κινήσεις των σχημάτων, και τις όποιες γενικεύσεις πηγάζουν από αυτό.*

Ένα πρώτο που έχουμε να εξετάσουμε, είναι - για να απαντήσουμε στο ερώτημα κατά πόσον είμαι δεινόσαυρος ή όχι, ένα είδος δηλαδή, το οποίο θα εκλείψει με το βιολογικό θάνατο όσων έχουν διδαχτεί Γεωμετρία - να δούμε τις ανάγκες που εξυπηρετεί η Γεωμετρία σε κοινωνικό επίπεδο. Σε επίπεδο, θα έλεγα, κοινωνικής παραγωγής.

Καταρχήν ιστορικά. Όλοι γνωρίζουμε ότι ετυμολογικά Γεωμετρία σημαίνει "μέτρηση της γης". Οι Αιγύπτιοι είχαν ανάγκη από Γεωμετρία, γιατί πλημμύριζε ο Νείλος και έπρεπε να ξανακατανείμουν τα χωράφια τους κάθε φορά. Η Γεωμετρία αναπτύχθηκε από τους αρχαίους Έλληνες, αναπτύχθηκε στην τεχνολογία της αρχαιότητας με τη μελέτη διαφόρων επιφανειών, καμπύλων, που εξυπηρετούσαν και πολύ τεχνικά προβλήματα, όπως οι αντλίες π.χ. με τους έλικες, η όλη στατική. Ακόμα εξυπηρετούσε τις ανάγκες της Αστρονομίας. Υπήρχαν κανόνες, και όλο το Πτολεμαϊκό σύστημα βασίζεται στους κανόνες ότι όλες οι τροχιές πρέπει να παράγονται από κύκλους. Δυστυχώς οι τροχιές δεν ήταν (και δεν είναι) κύκλοι. Για να εξηγηθούν, επομένως, οι τροχιές των πλανητών, εφευρέθηκε ολόκληρο το σύστημα των κύκλων και των επικυκλίων, διότι η Αστρονομία ήταν κάτι, το οποίο έμπαινε σαφώς μέσα στην κοινωνική οργάνωση. Χωρίς αυτό να αποκλείει βέβαια ότι και το ηλιοκεντρικό σύστημα αναπτύχθηκε εκείνη την εποχή - και κατά τύχη(;) κάηκαν τα γραπτά του Αρίσταρχου του Σάμιου, ο οποίος το είχε διατυπώσει - αλλά αυτό είναι μια άλλη ιστορία.

Αυτό συνεχίζει. Όλη αυτή η παράδοση ξεπερνά την αρχαία Ελλάδα, η όλη γεωμετρική γνώση, η οποία είναι στην ουσία ταυτόσημη με τη Φυσική, με την έννοια της Μηχανικής. Αναπτύσσεται και με τη βοήθεια του Απειροστικού Λογισμού και με τις νέες ανάγκες οι οποίες υπάρχουν, τη μελέτη των τροχιών, τη βλητική, τα τηλεσκόπια, όλα αυτά. Η Γεωμετρία είναι μέσα στην επιστημονική, στην τεχνολογική παραγωγή. Για να μη μιλήσουμε και για την καθημερινή ζωή.

Μπορούμε να πούμε ότι η Φυσική αποδεσμεύεται από τη Γεωμετρία με την εμφάνιση των νέων μορφών ενέργειας - νέων για την εποχή εκείνη, του ατμού, του ηλεκτρισμού κτλ. Παρόλα αυτά, ακόμα και σήμερα, στην Κβαντική Φυσική π.χ., η οποία είναι και το πιο προχωρημένο, ας πούμε, στάδιο της Φυσικής, τουλάχιστον ως προς τη μελέτη σε βάθος της δομής της ύλης, μιλάμε για τροχιές ηλεκτρονίων, παρόλο που δεν υπάρχει η δυνατότητα εντοπισμού του ηλεκτρονίου: οι τροχιές δεν είναι τροχιές με την ακριβή έννοια. Τί είναι; Είναι μια *αναλογία*, δανεική από τη Γεωμετρία, η οποία χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα. Γιατί; Γιατί η Γεωμετρία είναι το κατεξοχήν επιστημολογικό παράδειγμα, το παράδειγμα αναφοράς, το οποίο μπορείς να το ξεπεράσεις με την έννοια των κυματοσυναρτήσεων, αλλά το οποίο σου δίνει μια προεικόνα έστω και αναλογική. Επομένως το λεξιλόγιο παραμένει δάνειο από την Γεωμετρία.

Ας δούμε τώρα τις ανάγκες που καλύπτει *σήμερα* η Γεωμετρία. Μπορούμε να πούμε πρώτα απόλα, ότι υπάρχει μια υποχώρηση των καθαρά γεωμετρικών τεχνικών, π.χ. των αναλογικών μεθόδων. Ένα από τα πιο τρανταχτά παραδείγματα είναι ότι πριν από 25 χρόνια οι μηχανικοί κυκλοφορούσαν με τον λογαριθμικό κανόνα στην τσέπη. Από τη στιγμή που βγαίνουν τα ηλεκτρονικά μηχανάκια τσέπης, πέφτει σε αχρηστία η αναλογική μέθοδος, γιατί το ψηφιακό σύστημα σου δίνει όσα ψηφία θέλεις. Το ίδιο συμβαίνει με τα ρολόγια. Μπορεί να υπάρχουν ακόμα ρολόγια τα οποία μιμούνται σε σχήμα τα παλαιού τύπου ρολόγια, αλλά είναι ψηφιακά. Οι μηχανισμοί των οδοντωτών τροχών δεν υπάρχουν, ή υπάρχουν μόνο σαν αντικείμενα συλλογής και όχι σαν αντικείμενα καθημερινής χρήσης. Και έχει καταργηθεί ακόμα και το σχήμα : γράφοντας ψηφιακά την ώρα 08.43 δε χρειάζονται πια οι βελόνες που κυνηγούν η μια την άλλη.

Από την άλλη μεριά, βέβαια, παραμένει η Γεωμετρία οπουδήποτε υπάρχουν κατασκευές. Παραμένει και πιο ανεπτυγμένη. Δηλαδή, από τα απλά σπίτια, τις παραλληλεπίπεδες πολυκατοικίες, στις οποίες δεν μπορεί κανείς να μην αναγνωρίσει ένα *τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων* (είναι μέσα στη ζωή μας το τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων, γιατί όλοι ζούμε ανάμεσα σε τοίχους, ταβάνια και πατώματα), ως τις κατασκευές γεφυρών ή palais de sport, όπου υπάρχουν κρεμαστές καμπύλες ή παραβολικά υπερβολοειδή ως οροφές, πάλι υπάρχει η έννοια της Γεωμετρίας τουλάχιστον ως εφαρμογή. Βέβαια, όπως σε κάθε εποχή, όλα αυτά γίνονται με τις ακριβέστερες διαθέσιμες μεθόδους : δηλαδή σήμερα με τη βοήθεια ηλεκτρονικών υπολογιστών - και όχι πια με κανόνα και διαβήτη, τις ακριβέστερες για την αρχαιότητα.

Υπάρχει και ένα άλλο στοιχείο στην σημερινή εποχή. Υπάρχει η εισβολή της εικόνας. Στην εικόνα υπάρχουν σχήματα, η εικόνα η ίδια ειναι γεωμετρικό αντικείμενο. Στα τηλεοπτικά κανάλια π.χ. βλέπει κανένας όχι απλώς το λογότυπο του καναλιού, αλλά βλέπει πώς έρχονται τα γράμματα ένα-ένα στοβιλιζόμενα και τοποθετούνται στη θέση τους. Πράγμα που προϋποθέτει ένα πρόγραμμα, που να έχει ενσωματώσει τις καθαρά γεωμετρικές έννοιες της προοπτικής των γραμμάτων, τα οποία κοιτάζει κανείς από λοξά, στριφογυρίζουνε, και κάθονται ως Ε, Ρ κτλ. Άρα, χρησιμοποιείται και εκεί η Γεωμετρία. Γιατί από την στιγμή που υπάρχει επεξεργασία της εικόνας, όσο κι αν αυτή η επεξεργασία γίνεται ψηφιακά, προϋπάρχουν οι κανόνες της Προβολικής Γεωμετρίας, οι οποίες τη διέπουν.

Επομένως και σήμερα στην κοινωνική παραγωγή η Γεωμετρία είναι απαραίτητη. Παρόλο, δηλαδή, που ορισμένες τεχνικές της Γεωμετρίας έχουν υποχωρήσει, ο χειρισμός - η χαλιναγώγιση θάλεγα - του χώρου, των σχημάτων, των κινήσεων, είναι βασικό γνώρισμα της σημερινής τεχνολογίας, είναι βασικό γνώρισμα της σημερινής κοινωνικής παραγωγής.

Έχει ανάγκη η κοινωνία από την Γεωμετρία.

- Ας περάσουμε τώρα στο ατομικό επίπεδο : Τί είναι για τον κάθε άνθρωπο η Γεωμετρία;

Η Γεωμετρία καταρχήν προϋπάρχει ως υπόβαθρο. Κινούμαστε ως έμβια όντα μέσα στο χώρο των τριων διαστάσεων, έχουμε επομένως δοσοληψίες μαζύ του, όπως και με όλο μας το περιβάλλον : δεχόμαστε επιδράσεις απ΄αυτό και με τη σειρά μας επιδρούμε πάνω του. Και ως όντα λογικά, σκεφτόμαστε και κατανοούμε (ή τουλάχιστον προσπαθούμε) το περιβάλλον και τη σχέση μας μ'αυτό - άρα και με το χώρο.

Σε κάθε άτομο, η σχέση με το χώρο βιώνεται απο πολύ νωρίς, απο τη βρεφική κιόλας ηλικία. Είναι αρκετά γνωστά, και στους μή ειδικούς όπως εγώ, τα αποτελέσματα του Piaget, που εξετάζουν την όλη εξοικείωση με το χώρο: σε μια πρώτη φάση στο αισθητικο-κινητικό επίπεδο, σε μια δεύτερη στο συνειδητό επίπεδο. Δηλαδή, πριν το παιδί κάνει λογικές σκέψεις, την αίσθηση του χώρου την έχει. Από ένα σημείο και πέρα, τα ερεθίσματα αυτά εισρέουν στον εγκέφαλο και σχηματίζουν νοητικές κατηγορίες. Τις έννοιες του μέσα και του έξω, κτλ. Υπάρχει κι ένα τρίτο στάδιο στο οποίο προχωράμε. Είναι η οργάνωση των εννοιών ως προς τις διαπλοκές που έχουν μεταξύ τους. Απ' όσο γνωρίζω τουλάχιστον, σε όλες τις γλώσσες υπάρχουν έννοιες και συλλογισμοί που αφορούν το χώρο, σε όλες τις γλώσσες επίσης υπάρχει λογική δομή. Και κατά μία άποψη, δεν είναι τυχαίο ότι, *επειδή έχουμε ως ανθρώπινα όντα αυτές τις ιδιότητες, η Γεωμετρία ήταν και ο πρώτος κλάδος γνώσης, ο οποίος οργανώθηκε επιστημονικά.*

- Θέλω λοιπόν τώρα, να εξετάσω λιγάκι τί σημαίνει Γεωμετρία ως επιστήμη. Και πάλι θα δώσω ένα πρόχειρο ορισμό, λειτουργικό, για τα πλαίσια αυτής της ομιλίας. *Θεωρώ επιστήμη ένα οργανωμένο σύστημα γνώσεων,* **το οποίο είναι πρώτα - πρώτα ανεξάρτητο από τον φέροντα.** Είναι δηλαδή μεταδόσιμο, είναι κάτι το οποίο δεν έχει να κάνει με την κοινωνική θέση, στο ιερατείο π.χ. αυτού ο οποίος εκφέρει την γνώση ή το αποτέλεσμά της, αλλά *είναι κάτι το οποίο ο καθένας μπορεί, έχει τα φόντα, με την κατάλληλη προσπάθεια, μελέτη, κτλ., να οικειοποιηθεί.*

Δεύτερο, πρέπει να έχει μία λογική συνοχή. Πρέπει να είναι σε θέση να διατυπώνει προβλήματα στα οποία να υπάρχει η δυνατότητα της απάντησης του τύπου *ναι, οχι, δεν ξέρω, δεν είναι δυνατόν να υπάρχει απόδειξη, το πρόβλημα δεν ειναι σωστα διατυπωμενο* κτλ.

Και τρίτον, πρέπει να υπάρχει επίγνωση του αντικειμένου με το οποίο ασχολείται : Ποιά ερωτήματα μπορούν να τεθούν μέσα στο σύστημα, ποιά όχι, και ποιά είναι οριακά.

Αν κοιτάξουμε κάτω από αυτό το πρίσμα τη Γεωμετρία, από τη στιγμή που το αντικείμενο με το οποίο ασχολείται είναι κοινό υπόβαθρο πολιτισμικό, θάναι εύκολο να συμπεράνουμε ότι, αν όχι η πρώτη, τουλάχιστον μέσα στους πρώτους επιστημονικούς κλάδους που έμελλε να αναπτυχθούν, θάταν η Γεωμετρία.

Και αρχίζουμε από τον Ευκλείδη. Το βασικό πρόβλημα στον Ευκλείδη είναι η διατύπωση του θεωρητικού συστήματος. Ήδη ήταν γνωστά σκόρπια πράγματα. Το καινούργιο στα Στοιχεία του Ευκλείδη είναι: **τί, βάσει τίνος;** Τί είναι τα αξιώματα και τί είναι τα θεωρήματα. Τί βάζουμε στην αρχή και τί βάζουμε στο τέλος.

Πολλά μπορεί να πει κανείς για τα Στοιχεία, και πολλά έχουν ειπωθεί. Υπάρχουν πράγματα μέσα, τα οποία όντως σηκώνουν κριτική. Π.χ. ο ορισμός της ευθείας είτε δοθεί, είτε δεν δοθεί, δεν έχει καμιά σημασία, διότι δεν παρεμβαίνει καθόλου μετέπειτα. Έχουμε πάντως εκεί πέρα το πρώτο αξιωματικό σύστημα μέσα στα Μαθηματικά, το οποίο ήταν και το μόνο μέχρι πριν από 200 χρόνια περίπου που άρχισε να γίνεται συστηματοποίηση και σε άλλους κλάδους.

Το *τί, βάσει τίνος*, είναι το ένα. Από κει και πέρα είναι το "**τί είναι μετά**". Γιατί είναι τόσα πολλά τα προβλήματα τα οποία γεννιούνται από την επίλυση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, είναι άπειρος ο πλούτος των ερωτημάτων τα οποία μπορούν να τεθούν, και έχουμε όλη την πορεία από την κατασκευή των κανονικών πολυέδρων, στα οποία καταλήγουν τα Στοιχεία του Ευκλείδη, μέχρι την μελέτη π.χ. των ολόμορφων πολλαπλοτήτων και πολλά άλλα : δεν έχει νόημα να κάνουμε μιαν απαρίθμηση αυτή τη στιγμή.

Η ουσία είναι οτι ανάμεσα στα καινούργια ερωτήματα, που ξεφυτρώνουν σαν τα κεφάλια της Λερναίας Ύδρας, υπάρχουν και μερικά τα οποία υπερβαίνουν τα αρχικά δεδομένα, οδηγούν σε κατασκευή νέων νοητικών κατηγοριών. Αυτό που αποκαλούμε "πρόοδο" με την καλώς εννοούμενη έννοια της λέξης.

Θά δώσω ορισμένα τέτοια παραδείγματα. Ένα από αυτά είναι *η θεωρία των λόγων του Ευδόξου*, που οδηγεί στον απειροστικό λογισμό, και η οποία, διατυπωμένη σε σύγχρονη Μαθηματική γραφή, δεν είναι τίποτε άλλο παρά ειδικές ακολουθίες Cauchy, οι οποίες συγκλίνουν από πάνω και από κάτω σε μη ρητούς λόγους, δηλαδή σε πραγματικούς αριθμούς.

Υπάρχει *το πέμπτο αίτημα του Ευκλείδη* και όλη η προσπάθεια που έγινε για την απόδειξη ή την αναίρεση της ύπαρξης μιας μοναδικής παραλλήλου, το οποίο οδηγεί σε χιλιάδες πράγματα. Οδηγεί καταρχήν στην απαλλαγή της Γεωμετρίας (και των Μαθηματικών γενικότερα) από το υλικό υπόβαθρο από το οποίο ξεκίνησε, στον απογαλακτισμό - ή την ενηλικίωσή της.

Μέχρι τότε η Γεωμετρία ήταν συνδεδεμένη με τη μέτρηση των επιφανειών, των όγκων κτλ. Από κει και πέρα, παύει νάναι, παρόλο που ο Alexandroff π.χ. σε μια προσπάθεια υποστήριξης της Γεωμετρίας του Lobachevsky (σε ένα βιβλίο που έχει μεταφραστεί στα ελληνικά), μέσα σε όλα τ'άλλα, δίνει το επιχείρημα ότι όντως η Γεωμετρία του Lobachevsky ίσως είναι καλύτερη σε κοσμολογικό επίπεδο για την περιγραφή του Σύμπαντος, γιατί το Σύμπαν έχει καμπυλότητα. Μα δεν είναι αυτό το οποίο παίζεται! Η Γεωμετρία του Lobachevsky είναι ορθή. Υπάρχει μαθηματικό μοντέλο το οποίο την υλοποιεί, δεν είναι δηλαδή κενή περιεχομένου, κι αυτό αρκεί. Το αν ταιριάζει καλύτερα στη δομή του Σύμπαντος, δεν αποτελεί δικαιολογία για την ύπαρξή της - είναι απλώς ένα κίνητρο για κάποιον ν' ασχοληθεί μαζύ της.

Από ένα σημείο και έπειτα, από την χειραφέτηση των Μαθηματικών από την εφαρμογή τους, η εφαρμογή δεν αποτελεί δικαιολογία. Βέβαια πάνω σε αυτό υπάρχει και η γνωστή ρήση του Hilbert ότι "*δεν με ενδιαφέρει αν μιλάμε για τραπέζια, καρέκλες και ποτήρια μπύρας, ή επίπεδα, ευθείες και σημεία, φτάνει αυτό το οποίο λέμε να έχει λογική συνοχή*". Είναι η κυρίαρχη σήμερα σκέψη στα Μαθηματικά. Από κει και πέρα, όποιος θέλει παίρνει το μοντέλο και το εφαρμόζει.

Βέβαια αυτή τη φοβερή - φοβερή με όλες τις έννοιες της λέξης - συμβολή της Γεωμετρίας στη χειραφέτηση των Μαθηματικων, την πληρώνει η ίδια. Την πληρώνει διότι παύει να υπάρχει ως αυτόνομος κλάδος, διότι δεν ενδιαφερόμαστε για τις επιφάνειες, ενδιαφερόμαστε πλέον για τα υποσύνολα του R^3, όπως είχαμε πει στην αρχή, *χωρίς βέβαια να δίνουμε απάντηση στο* **γιατί ενδιαφερόμαστε γιαυτά τα συγκεκριμένα υποσύνολα τα οποία αντιστοιχούν σε επιφάνειες**. Αυτό δεν είναι μαθηματικό θέμα να απαντηθεί : είναι μετα-μαθηματικό…

Θα μπορούσα να αναφερθώ και σ' άλλες περιπτώσεις που ξεπερνούν το αρχικό πρόβλημα. Π.χ. ο τύπος του Euler που συνδέει τις κορυφές, τις έδρες και τις ακμές ενός τυχαίου πολυέδρου, χωρίς όμως να ισχύει πάντα, μετά από διάφορες περιπέτειες καταλήγει στην διατύπωση της Ομολογικής Αλγεβρας από τον Poincaré. Δε νομίζω όμως οτι είναι απαραίτητο.

Κι αυτό, επειδή αυτές οι καταστάσεις, των προβλημάτων δηλαδή που ξεπερνούν τα αρχικά δεδομένα, δεν χαρακτηρίζουν μόνο τη Γεωμετρία : σε κάθε κλάδο των Μαθηματικών, και γενικότερα σε κάθε επιστήμη, μπαίνουν κάποτε ερωτήματα τόσο κρίσιμα ωστε να οδηγούν σε ριζική επαναδιατύπωση του θεωρητικού πλαισίου απο το οποίο πηγάζουν.

- Θέλω, επομένως, να εξετάσω σε τί διαφοροποιείται η Γεωμετρία μέσα στα Μαθηματικά.

Ενα απο τα βασικά χαρακτηριστικά των Μαθηματικών είναι η **γραμμικότητα,** η γραμμικότητα με την έννοια της **διάταξης.** Το κατεξοχήν αντικείμενό τους, οι αριθμοί, ακέραιοι ή πραγματικοί, είναι διατεταγμένο σύνολο,. Αλλά και η όλη διατύπωσή τους είναι γραμμική, επειδή γραμμικός είναι ο χρόνος, γραμμικός και ο λόγος, η ομιλία. Κάθε εκφώνηση, κάθε απόδειξη, είναι λέξεις στη σειρά, η μια μετά την άλλη. Ακόμα κι αν υπάρχει συσχέτιση με τα προηγούμενα ή με τα επόμενα, αυτή η γραμμικότητα υπάρχει. Οσα πήγαινε-έλα και να κάνει κανείς σ' έναν πολύπλοκο συλλογισμό, θα τον διατυπώσει γραμμικά, και γραμμικά θα τον διαβάσει ή θα τον ακούσει ο άλλος. Αναγκαστικά.

Και καθώς στα Μαθηματικά εργαλείο και αντικείμενο ταυτίζονται, αυτή η γραμμικότητα χρησιμοποιείται κατα κόρον. Στέλνεις ένα σύνολο, με διάφορους τρόπους, πάνω στους πραγματικούς ή τους ακέραιους αριθμούς, κι απο κεί αντλείς συμπεράσματα για το αρχικό σύνολο. Ετσι παίρνεις, ας πούμε, την έννοια του μέτρου, ή το θεώρημα του Gödel.

Ας αναφερθούμε λίγο στο τελευταίο, το θεώρημα δηλαδή που λέει πως μια μαθηματική θεωρία δεν μπορει να είναι πλήρης. Σχηματικά, μπορούμε να αναγάγουμε τις προτάσεις της θεωρίας, απαριθμώντας τις κατάλληλα, σε κάποια διάταξη των πραγματικών αριθμών, και βάσει αυτού να αποδείξουμε, χρησιμοποιώντας διάφορους κανόνες αυτοαναφοράς (αριθμημένους κι αυτούς), οτι υπάρχει κάποιο θεώρημα το οποίο δεν μπορεί να πει κάτι για τον αριθμό του. Γιατί ειδεμη θα μπαίναμε σε διάφορα διαγώνια λογικά άτοπα.

Επομένως υπάρχει, και χρησιμοπείται, αυτή η γραμμικότητα. Κι από κει και πέρα ας δούμε πώς αυτή η γραμμικότητα εκφράζεται στην λύση ενός μαθηματικού προβλήματος.

Αυτό που λέω στους φοιτητές μου, είναι ότι υπάρχει ένας και μοναδικός τυφλοσούρτης για να λύσω ένα μαθηματικό πρόβλημα : **Τί μας δίνουν, τί μας ζητούν και ποιός είναι ο δρόμος για να πάμε από το ένα στο άλλο.** Φυσικά αυτό δεν είναι τυφλοσούρτης, άμα το κοιτάξει κανένας από πιο κοντά, γιατί έχει να κάνει με πολλές επιλογές. Σημαίνει απλά οτι πρέπει να ξέρουμε τί κάνουμε κάθε φορά.

Το τρίτο σκέλος του τυφλοσούρτη είναι ο δρόμος. Το γραμμικό σκέλος, αυτό είναι ο δρόμος. Ενα παράδειγμα; Μία παραγώγιση μιας πολύπλοκης παράστασης. Τί κάνεις; Χωρίζεις τους όρους. Παραγωγίζεις κάθε προσθετέο, μετά παραγωγίζεις τα γινόμενα, μετά εφαρμόζεις την σύνθεση συναρτήσεων, παραγωγίζεις λογάριθμο του ημιτόνου της τετραγωνικής ρίζας του τάδε, κτλ. Στο τέλος, μετά από μια σειρά παιδευτικών πράξεων - ίσως όχι και τόσο παιδευτικών αλλά κοπιαστικών πράξεων - κάπου καταλήγεις.

Σε τέτοιου τύπου προβλήματα, η σειρά με την οποία θα κάνεις τις πράξεις είναι χοντρικά δεδομένη. Τα προβλήματα της Άλγεβρας στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ειναι αυτού του τύπου. Ποιές ταυτότητες θα εφαρμόσεις; Είναι γνωστές οι ταυτότητες. Ποιά ταιριάζει, ποιά δεν ταιριάζει, πώς θα αναπτύξουμε αν είναι να πάμε από γινόμενο σε άθροισμα, από άθροισμα σε γινόμενο κτλ. Η επίλυση είναι σχετικά τυποποιημένη.

Στη Γεωμετρία δεν είναι δεδομένη η διάταξη του τί θα κάνεις. Εάν στρίψεις ένα σχήμα και το μετατοπίσεις μετά, δεν είναι το ίδιο σαν να το μετατοπίσεις πρώτα και να το στρίψεις μετά. Αν θα επιλέξεις από το τάδε ή το τάδε σημείο να φέρεις την κάθετο ή την παράλληλη, δεν είναι δεδομένο του προβλήματος. Πρέπει να στίψεις το μυαλό σου για να το βρεις. Αυτό ήτανε και η κρυφή γοητεία, στο Γυμνάσιο όταν ήμουνα, των ασκήσεων της Γεωμετρίας απέναντι στις ασκήσεις της Άλγεβρας. Ότι η Άλγεβρα, αν ήξερες τους τύπους, έβγαινε. Η Γεωμετρία, ποτέ δεν ήσουν σίγουρος. Και άμα το λύσεις, η απόλαυση είναι μεγαλύτερη. Και η απόλαυση έχει μία αξία, η οποία σε χρήμα δεν αποτιμάται. Έχει μία αξία αυτή καθεαυτή. **Η διάταξη δεν είναι δεδομένη, το μυαλό πρέπει να δουλέψει πιο πολύ.**

Αυτή είναι μία φράση κλειδί. Και πάνω σε αυτό ορισμένα σχόλια :

Πρώτο σχόλιο : Οι υπολογιστές για να παραστήσουν γεωμετρικά σχήματα καταλήγουν σε ψηφιακές μεθόδους, όπου όλα είναι στη σειρά. Η οθόνη χωρίζεται σε σειρές και κάθε σειρά σε κουκίδες, τα pixel ονομαζόμενα. Εξαντλούμε την πρώτη σειρά, τη δεύτερη σειρά, πάρα πολλές, 1000x1000 κουκίδες ας πούμε, και σχηματίζουμε μία εικόνα pixel προς pixel. Αλλά για να φθάσουμε μέχρι εκεί, το λογισμικό προϋποθέτει γνώση των κανόνων της Γεωμετρίας που χρησιμοποιούνται, για να ξέρεις αν η τάδε κουκίδα θα βγει άσπρη, μαύρη ή κόκκινη - ή θ'αναβοσβήνει. Η γραμμικοποίηση δεν είναι τίποτε άλλο παρά μία *μετάφραση* του σχήματος - της θεωρητικής Γεωμετρικής έννοιας - σε σειρά αριθμών, για να τις διαβάσει ο υπολογιστής και να τις μεταφράσει πάλι σε εικόνα με τη σειρά του. Έχουμε ένα πήγαινε-έλα. *Το ψηφιακό επεμβαίνει διότι ο υπολογιστής μόνο ψηφιακά καταλαβαίνει.*

Δεύτερο σχόλιο : Ας μου επιτραπεί σχόλιο έξω-μαθηματικό. Έχει να κάνει με την έννοια της διάταξης, βέβαια. Υπάρχει η διάταξη των ακεραίων αριθμών, όπως και των πραγματικών αριθμών. Υπάρχει μία φυσική, δεδομένη διάταξη. Υπάρχει μία ιεραρχία στους αριθμούς.

Υπάρχει επίσης μία ιεραρχία στην κοινωνία, στην όποια κοινωνία, στην κάθε κοινωνία. Υπάρχει μια ιεραρχία. Πρέπει να τη *σεβόμαστε* αυτή την ιεραρχία. Πρέπει να μην την ανατρέπουμε αυτή την ιεραρχία. Είναι *καλύτερο* να μαθαίνουμε να σκεφτόμαστε γραμμικά. Να *μην* περνάμε ανατρεπτικές ιδέες. Να αλλάξουμε τη διάταξη των αριθμών και να βάλουμε το 3 πριν το 2 ! Από πού κι ως πού;

Βέβαια υπάρχει κάποιο παράδοξο σ'αυτή την αναλογία, γιατί κάθε αριθμός έχει ανώτερό του, ενώ κάθε άνθρωπος δεν έχει. Είναι πεπερασμένο το πλήθος των ανθρώπων. Φτάνεις στην κορυφή και πού είναι ο ανώτερος;

Παρόλα αυτά, το ιδεολόγημα δουλεύει. Ποιό ιδεολόγημα, εξάλλου, δείλιασε ποτέ μπροστά σ΄ενα λογικό παράδοξο; Σκασίλα του!

Ε, λοιπόν, **δεν υπάρχει δεδομένη διάταξη στην Γεωμετρία**, *γιαυτό* **δεν είμαστε δέσμιοι μιας a priori ιεραρχίας**. Την ιεραρχία του προβλήματος την κατασκευάζουμε ανάλογα με τις ανάγκες του προβλήματος. Γι αυτό, εξωμαθηματικά, σαν πολίτης, η Γεωμετρία μου πάει καλύτερα. Πρώτα θα κοιτάξεις το σημείο Α και μετά το Β. Και αν δεν σε βολεύει θα κοιτάξεις το Β και μετά το Α. Και τελείωσε. Δεν είναι το Α Πρωθυπουργός, το Β αστυνομικός και το Γ οδηγός, ξέρω και εγώ, τρόλεϋ.

• Διατύπωσα, επομένως, ορισμένα πράγματα για την Γεωμετρία. Ας δούμε τώρα για την Γεωμετρία στην εκπαίδευση.

Εχουμε δύο πράγματα : την εκπαίδευση που θα διαμορφώσει ειδικούς, επιστήμονες, και την εκπαίδευση των απλών ανθρώπων.

Απ' όσα είπα, για μεν την πρώτη, την εκπαίδευση των επιστημόνων στις θετικές επιστήμες, διατείνομαι ότι το επιστημολογικό παράδειγμα της Γεωμετρίας είναι οικουμενικότερο, ευρύτερο, πλουσιότερο από άλλα. Εμπεριέχει τη διάταξη. Δεν είναι όμως δέσμια της διάταξης. Εμπεριέχει το κοινό υπόβαθρο της ανθρώπινης εμπειρίας : την αίσθηση του χώρου. Παρέχει τις προϋποθέσεις σ' έναν επιστήμονα να οργανώσει τον χώρο ο οποίος τον περιβάλλει σε απλά σχήματα, σε συντεταγμένες κτλ, για να μπορέσει μετά να οργανώσει και την κατασκευή μιας γέφυρας, ενός πυραύλου, ενός αεροπλάνου, στο οποίο υπεισέρχονται παρά πολλά στοιχεία και χρειάζεται μία συνθετική ικανότητα. Η πρώτη συνθετική ικανότητα βγαίνει από τη Γεωμετρία. Ένα το κρατούμενο.

Γιατί όμως ο απλός μαθητής να μαθαίνει για τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα; Αυτό είναι ένα ψεύτικο πρόβλημα. Πολλά τέτοια *γιατί* μπορεί να υπάρχουν. Γιατί καταρχήν να μαθαίνει για την παράγωγο; Θα του χρειαστεί η παράγωγος στην καθημερινή ζωή; Στην πωλήτρια του super market χρειάζεται να ξέρει να παραγωγίζει; Ούτε το εγγεγραμμένο τετράπλευρο, ούτε η παράγωγος της χρειάζεται.

Αλλά δεν είναι μόνο τα Μαθηματικά που δεν χρειάζονται. Γιατί π.χ. να μαθαίνει το τάδε ποίημα, γιατί να μαθαίνει τον τύπο $CaCO_3$ του ανθρακικού ασβεστίου, γιατί να μαθαίνει την ναυμαχία του Αρτεμησίου, γιατί να μαθαίνει ποιός ήταν ο Ναρσής (για τον οποίο εξάλλου δεν αναφερόταν ότι ήταν και ευνούχος, πράγμα που θα μπορούσε να γεννήσει και υποψίες : τί ήταν και τί ρόλο είχαν οι ευνούχοι σε εκείνη την κοινωνία;). Γιατί να τα μαθαίνει όλα αυτά; Γιατί υπάρχει εκπαίδευση;

Άρα το ερώτημα είναι γιατί να μαθαίνει το εγγεγραμμένο τετράπλευρο *παρά* την παράγωγο π.χ., αυτό θα ήταν το σωστό ερώτημα. Νομίζω ότι αυτό απαντήθηκε περίπου : Γιατί η Γεωμετρία ειδικότερα και τα Μαθηματικά γενικώτερα, *σωστά διδαγμένα* - και πάλι θα ανοίξω μια τελευταία παρένθεση, θα παραλείψω το ρήμα της φράσης, θα σταματήσω τη φράση μου. Τί εννοώ *σωστά διδαγμένα*;

Τα Μαθηματικά ως ανθρώπινη δραστηριότητα είναι επίλυση προβλημάτων. Σε οποιοδήποτε επίπεδο γνώσης και να βρίσκεται ένα άτομο, *όταν κάνει Μαθηματικά, κάνει έρευνα.* Ψάχνει να δει τί έχει, ψάχνει να δει πώς θα φτάσει εκεί που θέλει να φτάσει, ή πού ενδεχομένως θα φτάσει. Με αυτά που έχεις τί μπορείς να κάνεις; Ερευνητική δραστηριότητα είναι η κάθε ενασχόληση με τα Μαθηματικά. Σε αντίθεση με την αποστήθιση τύπων. Όταν, λοιπόν, λέω "σωστά διδαγμένα" σημαίνει ότι ο δάσκαλος και η κατάσταση στην οποία ο δάσκαλος ωθεί τον μαθητή είναι, όχι απλώς να εφαρμόζει τους τύπους, αλλά να έχει επίγνωση γιατί εφαρμόζει τον έναν τύπο και όχι τον άλλο. Να μπορεί να βάλει το μυαλό του να δουλέψει. Αυτό σημαίνει - χωρίς νάγω να δώσω σε αυτά συμβουλές σε ανθρώπους οι οποίοι καθημερινά έχουν αυτό το πρόβλημα και οι οποίοι είναι πιεσμένοι από ένα αναλυτικό πρόγραμμα, το οποίο δεν μπορούν να βγάλουν - μιλάω όμως δεοντολογικά, ότι η ορθή διδασκαλία των Μαθηματικών είναι προφανώς να αναγκάσεις τον άλλο να στίψει το μυαλό του κι όχι να αποστηθίσει. Γι' αυτό η Γεωμετρία, σωστά διδαγμένη, ασκεί το μυαλό.

Και θα τελειώσω με το εξής απόφθεγμα, ή με το εξής ερώτημα, αν θέλετε, υπό μορφή αποφθέγματος. Ή απόφθεγμα, υπό μορφή ερωτήματος.

Τα παπούτσια και τα αυτοκίνητα διαφέρουν από το μυαλό και την ελευθερία του λόγου σε τί; Τα πρώτα φθείρονται όσο περισσότερο τα χρησιμοποιεί κανείς. Τα δεύτερα φθείρονται όσο περισσότερο δεν τα χρησιμοποιεί.

- Πρόκειται για την (κάπως εξωραϊσμένη) απόδοση ομιλίας στο συνέδριο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας στη Μυτιλήνη, στις 15/11/1997. Είναι αυτονόητες οι ευχαριστίες μου στο ΔΣ της ΕΜΕ για την πρόσκληση.
- Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τους Κούλη Κυριάκη, Βασίλη Παπαντωνίου και Τζέλλα Σκούρα για τις γόνιμες συζητήσεις που είχα μαζύ τους κατα τη διάρκεια προετοιμασίας αυτής της ομιλίας, καθώς και τη Μαλβίνα Παπακώστα για την ουσιαστική βοήθειά της στην αποτύπωση του κειμένου.